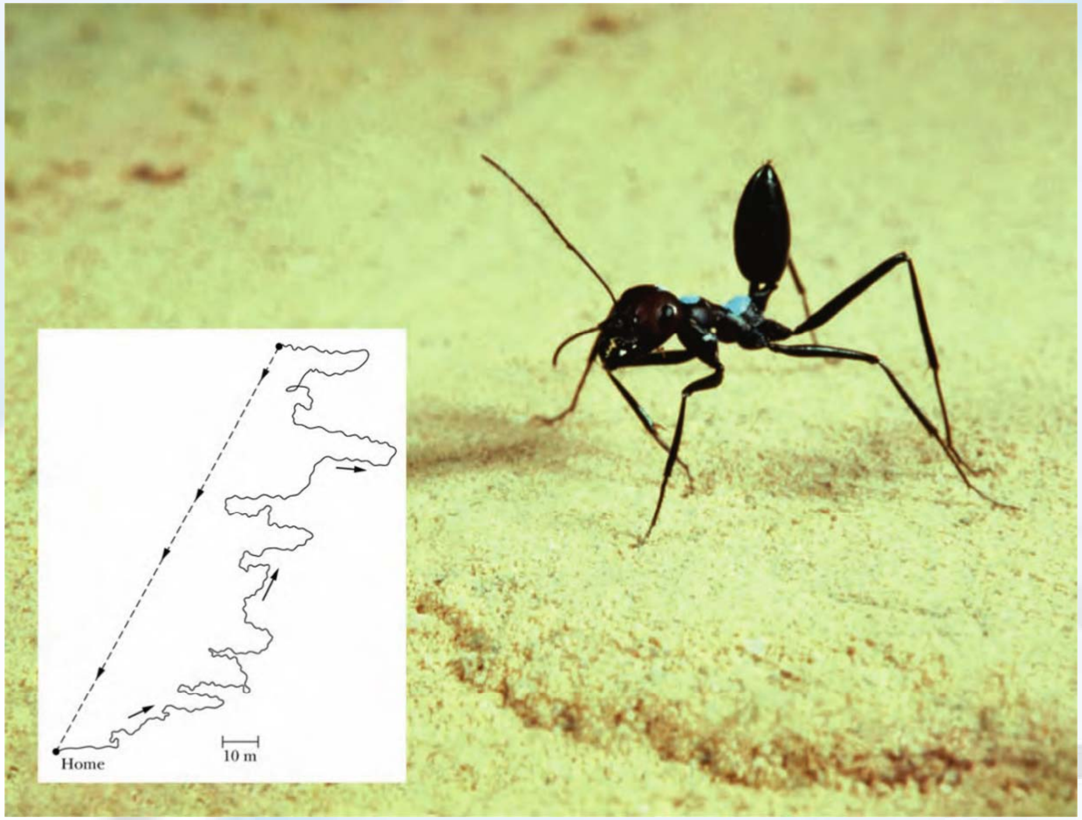
Chapter 3

向量

本章目的(Chapter Objectives)



- 在一片荒廢平原上，在沒有引導線索的情形下，螞蟻如何知道回家的路？

3-2 向量與純量

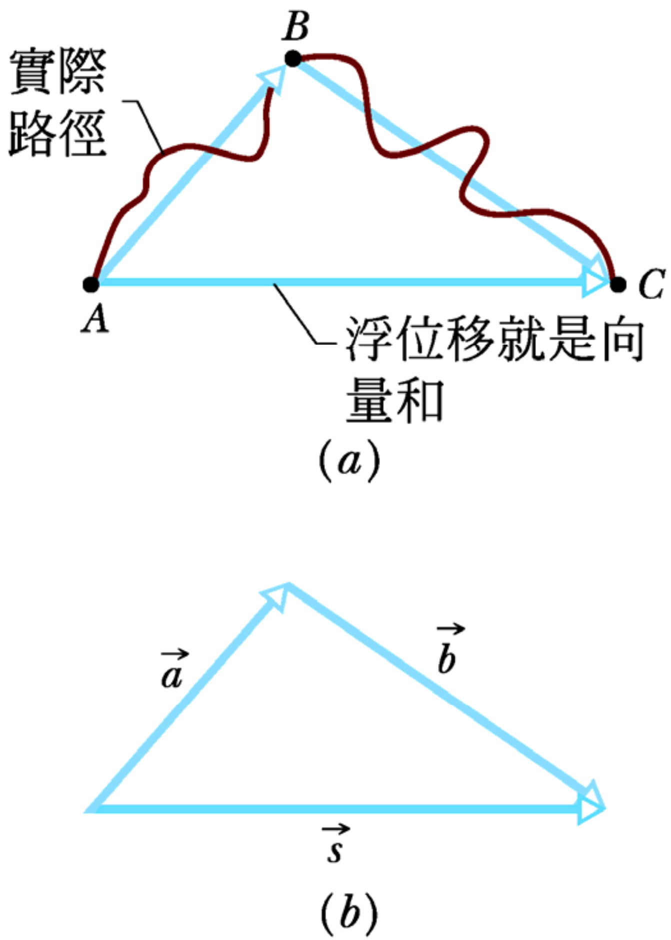
純量

純量，例如溫度，只有大小，他們可以一個數量級單位來表示（10℃），並且遵守算數和普通的代數法則。

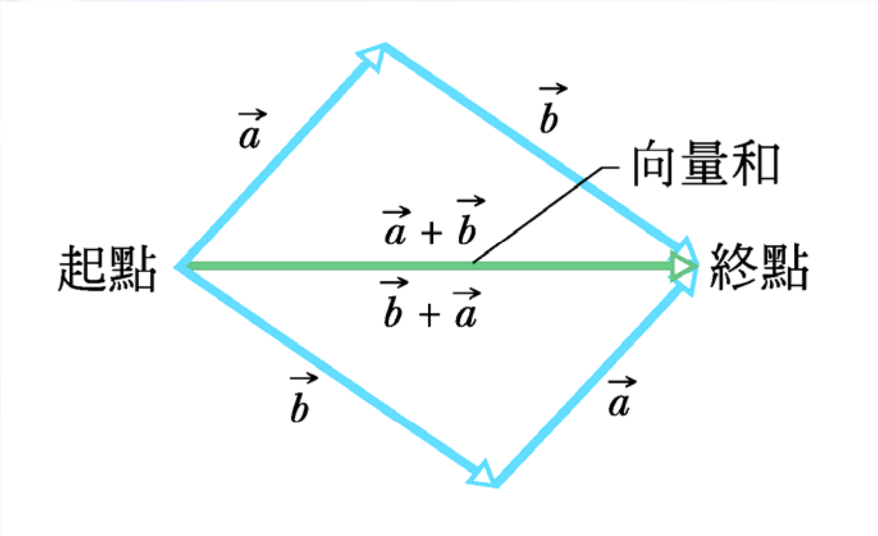
向量

向量，例如位移，具有大小和方向（5m，北方）遵守向量代數的特別法則。

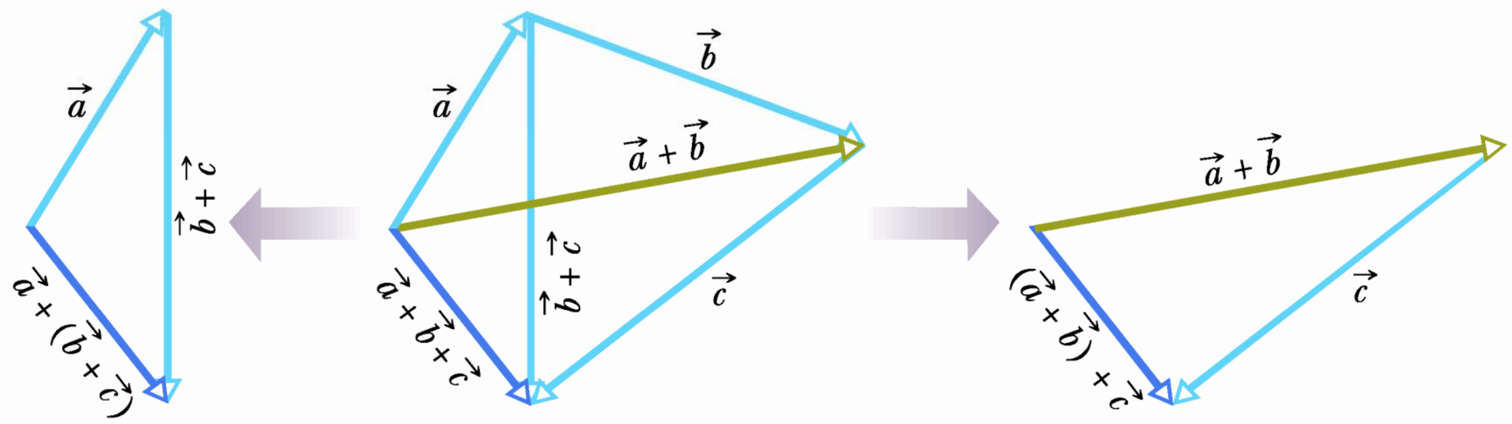
3-3 向量相加-圖解法



$$\vec{s} = \vec{a} + \vec{b}, \tag{3-1}$$



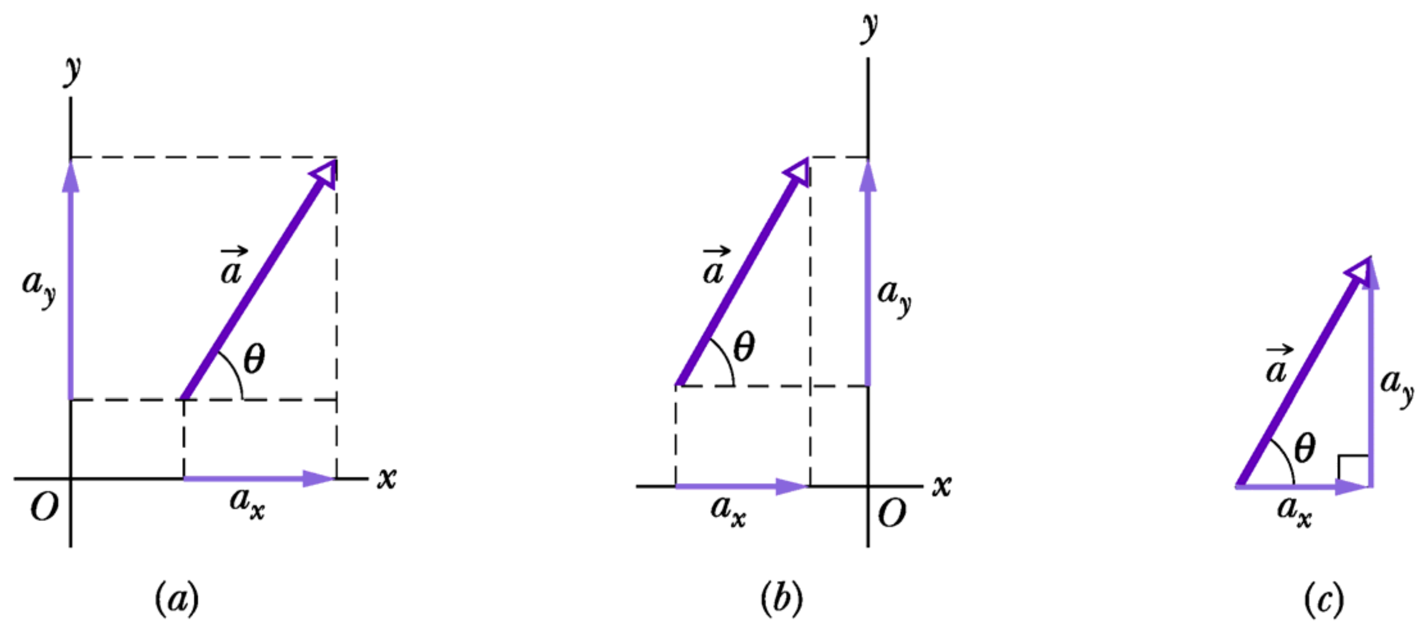
向量的交換律



$\vec{a}$
$\vec{b}+\vec{c}$
$\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$
$\vec{a}$
$\vec{b}$
$\vec{a}+\vec{b}$
$\vec{b}+\vec{c}$
$\vec{c}$
$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$
$\vec{a}+\vec{b}$
$\vec{c}$
$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}$

向量的結合律

3-4 向量的分量



$$a_x = a\cos\theta \qquad a_y = a\sin\theta$$

$$a = \sqrt{a_x + a_y} \qquad \theta = \tan^{-1}\frac{a_y}{a_x}$$

Example 3-2

一架小飛機在某一個陰天從機場起飛，稍後在 215km 遠處，被看到其方向在機場的北偏東 22°，試求被看到的位置是位於機場的東方幾公里？北方幾公里？

關鍵概念

我們已知向量的大小 (215km) 及角度 (北偏東 22°)，來計算其分量。

計算　我們畫一 xy 平面 (圖 3-10)，讓 x 軸向正東，y 軸向正北。為了方便起見，將機場置於原點，位移向量 $\vec{d}$ 由原點指向飛機被看見處。

為了求 $\vec{d}$ 之分量。將 $\theta = 68°\ (= 90° - 22°)$ 代入 3-5 式，得

$$d_x = d\cos\theta = (215\text{km})(\cos 68°) = 81\text{km}$$

$$d_y = d\sin\theta = (215\text{km})(\sin 68°) = 199\text{ km} \approx 2.0\times10^2\text{ km}$$

因此，飛機是位於東方 81 km 及北方 2.0×10^2 km 處。

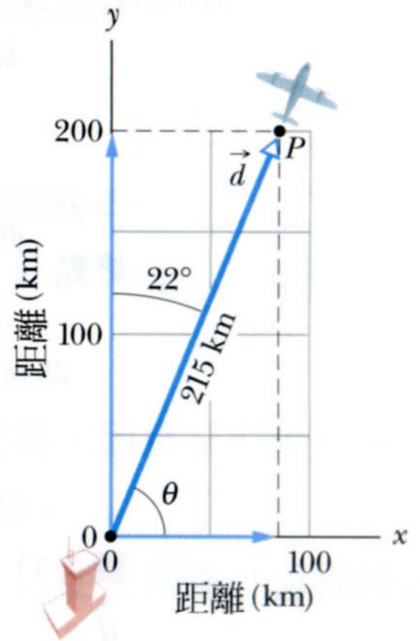
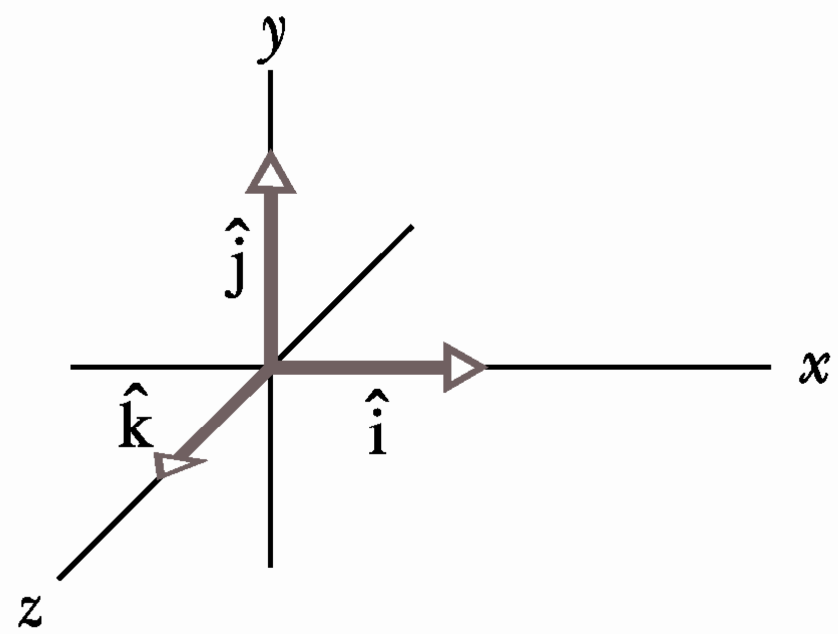
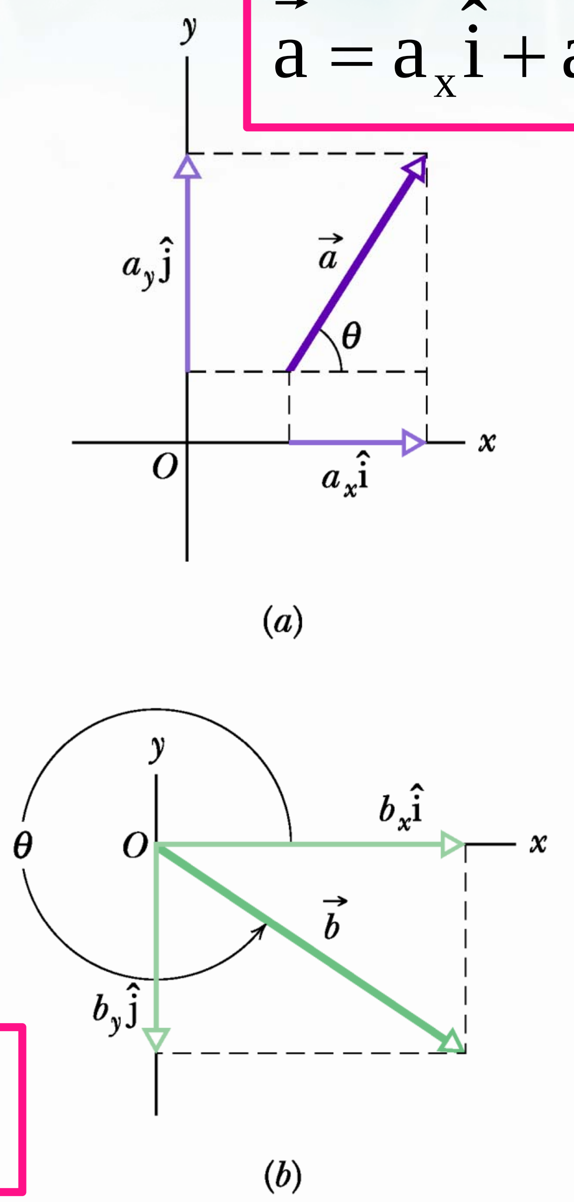


圖 3-10　一架飛機自(原點)飛至 P 點的圖形。

3-5 單位向量



$$\vec{a} = a_x\hat{i} + a_y\hat{j}$$



$$\vec{b} = b_x\hat{i} + b_y\hat{j}$$

3-6 用分量法求向量和

若

$$\vec{a} = a_x\hat{i} + a_y\hat{j}$$

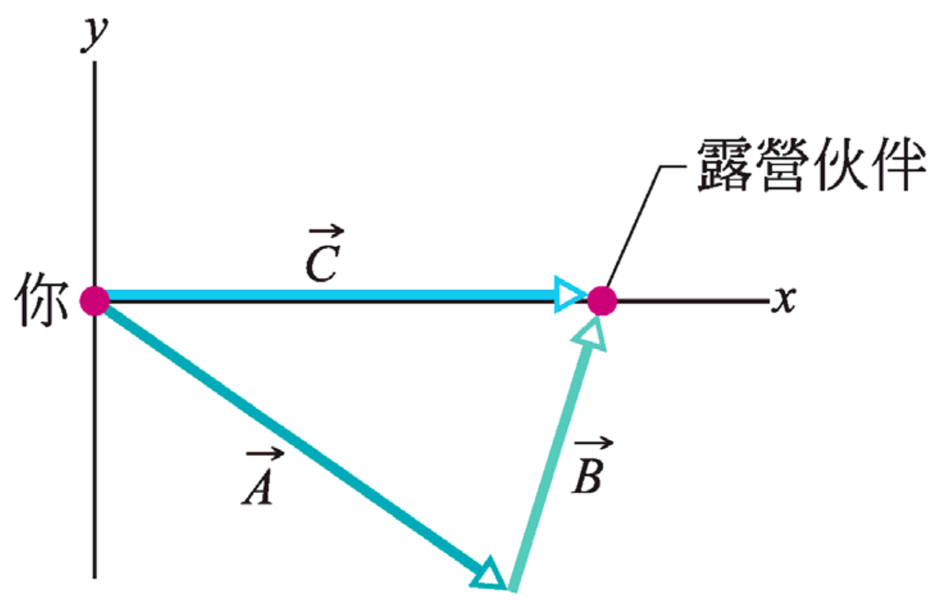
$$\vec{b} = b_x\hat{i} + b_y\hat{j}$$

且

$$\vec{r} = \vec{a} + \vec{b}$$

則

$$\boxed{\begin{aligned} r_x &= a_x + b_x \\ r_y &= a_y + b_y \end{aligned}}$$



time management

Example 3-4

有三向量以單位向量法表示如下：(圖 3-16a)

$$\vec{a} = (4.2\text{m})\hat{\mathrm{i}} - (1.5\text{m})\hat{\mathrm{j}}$$

$$\vec{b} = (-1.6\text{m})\hat{\mathrm{i}} + (2.9\text{m})\hat{\mathrm{j}}$$

$$\vec{c} = (-3.7\text{m})\hat{\mathrm{j}}$$

求三向量之和 $\vec{r}$。

關鍵概念

我們可用分量來做向量加法。

計算　對 x 軸而言，我們把 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 及 $\vec{c}$ 的 x 分量相加以得到 r 的 x 分量：

$$r_x = a_x + b_x + c_x = 4.2\text{m} - 1.6\text{m} + 0 = 2.6\text{m}$$

同理，對 y 軸而言，

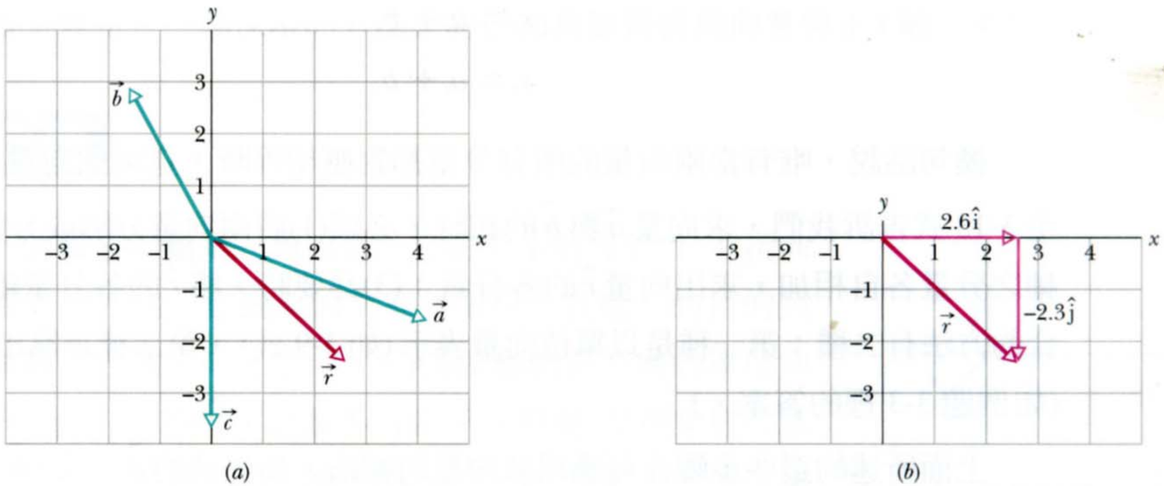


圖 3-16　向量 $\vec{r}$ 為其它三個向量的和。

$$r_y = a_y + b_y + c_y = -1.5\text{m} + 2.9\text{m} - 3.7\text{m} = -2.3\text{m}$$

我們可結合這些$\vec{r}$的分量，而把此向量用單位向量寫下來：

$$\vec{r} = (2.6\text{m})\,\hat{\text{i}} - (2.3\text{m})\,\hat{\text{j}} \qquad \text{(答)}$$

其中$(2.6\text{m})\,\hat{\text{i}}$為$\vec{r}$沿$x$軸的向量分量，$-(2.3\text{m})\,\hat{\text{j}}$則為$\vec{r}$沿$y$軸的向量分量。圖 3-16b顯示了一種用於組合這些向量分量以便形成$\vec{r}$的方式(讀者可以想出其他畫法嗎？)

我們也可以由給出$\vec{r}$的大小及角度來回答本題。由 3-6 式可得$\vec{r}$的大小為

$$r = \sqrt{(2.6\text{m})^2 + (-2.3\text{m})^2} \approx 3.5\text{m} \qquad \text{(答)}$$

其角度則為

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{-2.3\text{m}}{2.6\text{m}}\right) = -41^\circ \qquad \text{(答)}$$

其中負號代表順時針方向。

Example 3-5

根據實驗，螞蟻是沿著腦中的座標系統尋找其移動軌跡的。當牠想回巢穴時，牠會有效地沿著系統的軸將位移加總起來，然後計算出直接指向巢穴的向量。為了用來當作計算的範例，讓我們考慮一隻螞蟻從巢穴出發，在 xy 座標平面上標示了五個行進路程，每段路程都是 6.0 公分，其方向如圖 3-17a 所示。在第五段路程結束的時候，螞蟻總位移向量 $\vec{d}_{\text{net}}$ 的量值和角度是多少？螞蟻最後所在位置直接指向巢穴的回家向量 $\vec{d}_{\text{home}}$ 的量值與角度又是多少？

關鍵概念

(1)要找出淨位移 $\vec{d}_{\text{net}}$ ，我們需要將五個個別位移向量加總起來：

$$\vec{d}_{\text{net}} = \vec{d}_1 + \vec{d}_2 + \vec{d}_3 + \vec{d}_4 + \vec{d}_5$$

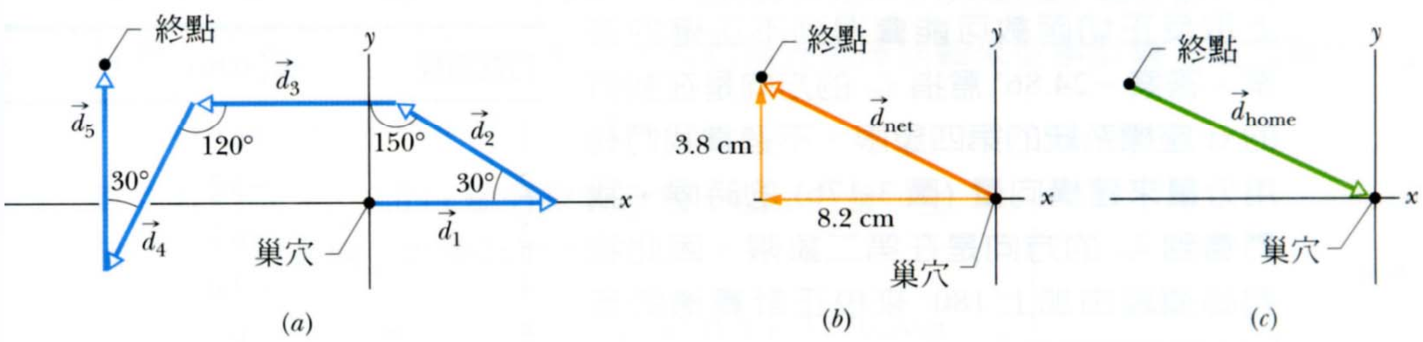


圖 3-17 (a)由五段路程組成的搜尋路徑。(b) $\vec{d}_{\text{net}}$ 的 x 和 y 分量。(c) 向量 $\vec{d}_{\text{home}}$ 指出回巢穴的路程。

(2)我們單獨計算這個總和的 x 分量，

$$d_{\text{net},x} = d_{1x} + d_{2x} + d_{3x} + d_{4x} + d_{5x} \tag{3-14}$$

time management

以及單獨計算 y 分量，

$$d_{\text{net},y} = d_{1y} + d_{2y} + d_{3y} + d_{4y} + d_{5y} \tag{3-15}$$

(3)我們由其 x 和 y 分量計算 $\vec{d}_{\text{net}}$ 。

計算 要計算 3-14 式，我們將 3-5 式的 x 部分應用到每段路程：

$$\begin{aligned}
d_{1x} &= (6.0\text{ cm})\cos 0° = +6.0\text{ cm}\\
d_{2x} &= (6.0\text{ cm})\cos 150° = -5.2\text{ cm}\\
d_{3x} &= (6.0\text{ cm})\cos 180° = -6.0\text{ cm}\\
d_{4x} &= (6.0\text{ cm})\cos(-120°) = -3.0\text{ cm}\\
d_{5x} &= (6.0\text{ cm})\cos 90° = 0
\end{aligned}$$

然後方程式 3-14 告訴我們

$$\begin{aligned}
d_{\text{net},x} &= +6.0\text{ cm} + (-5.2\text{ cm}) + (-6.0\text{ cm}) + (-3.0\text{ cm})\\
&\quad + 0 = -8.2\text{ cm}
\end{aligned}$$

同樣地，我們使用 3-5 式的 y 部分，計算五段路程個別的 y 分量。結果顯示於表 3-1 中。將結果代入 3-15 式，我們得到

$$d_{\text{net},y} = +3.8\text{ cm}$$

向量 $\vec{d}_{\text{net}}$ 以及其 x 和 y 分量顯示於圖 3-17b。要從其分量求出量值和 $\vec{d}_{\text{net}}$ 角度，我們使用 3-6 式。其量值是

$$\begin{aligned}
d_{\text{net}} &= \sqrt{d_{\text{net},x}^2 + d_{\text{net},y}^2}\\
&= \sqrt{(-8.2\text{ cm})^2 + (3.8\text{ cm})^2} = 9.0\text{ cm}
\end{aligned}$$

time management

為了求出角度 (從 x 軸的正方向加以測量)，我們取反正切函數：

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{d_{\text{net},y}}{d_{\text{net},x}}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{3.8\text{ cm}}{-8.2\text{ cm}}\right) = -24.86°$$

注意：請回想一下解題技巧 3，在計算機上取反正切函數可能會得到不正確的答案。答案 $-24.86°$ 意指 $\vec{d}_{\text{net}}$ 的方向是在我們的 xy 座標系統的第四象限。不過當我們利用分量來建構向量 (圖 3-17b) 的時候，我們看到 $\vec{d}_{\text{net}}$ 的方向是在第二象限。因此我們必須經由加上 180° 來校正計算機的答案。

$$\theta = -24.86° + 180° = 155.14° \approx 155°$$

表 3-1

行進路程	d_x (cm)	d_y (cm)
1	+6.0	0
2	−5.2	+3.0
3	−6.0	0
4	−3.0	−5.2
5	0	+6.0
淨值	−8.2	+3.8

因此，螞蟻的位移 $\vec{d}_{\text{net}}$ 具有如下的量值和角度

$$d_{\text{net}} = 9.0\text{ cm at }155° \quad \text{(答)}$$

從螞蟻所在位置指向巢穴的向量 $\vec{d}_{\text{home}}$ 具有與 $\vec{d}_{\text{net}}$ 相同的量值，但是方向相反 (圖 3-17c)。我們已經有方向相反於 $\vec{d}_{\text{net}}$ 的角度值 ($-24.86° \approx -25°$)。因此，$\vec{d}_{\text{home}}$ 的量值和角度為

$$d_{\text{home}} = 9.0\text{ cm at }-25° \quad \text{(答)}$$

一隻從其巢穴行進超過 500 m 的沙漠螞蟻，實際上會經歷上千次的個別路程。不過牠還是知道如何計算出淨位移 $\vec{d}_{\text{home}}$ (在沒有學過這一章的情形下)。

3-8 向量的乘法

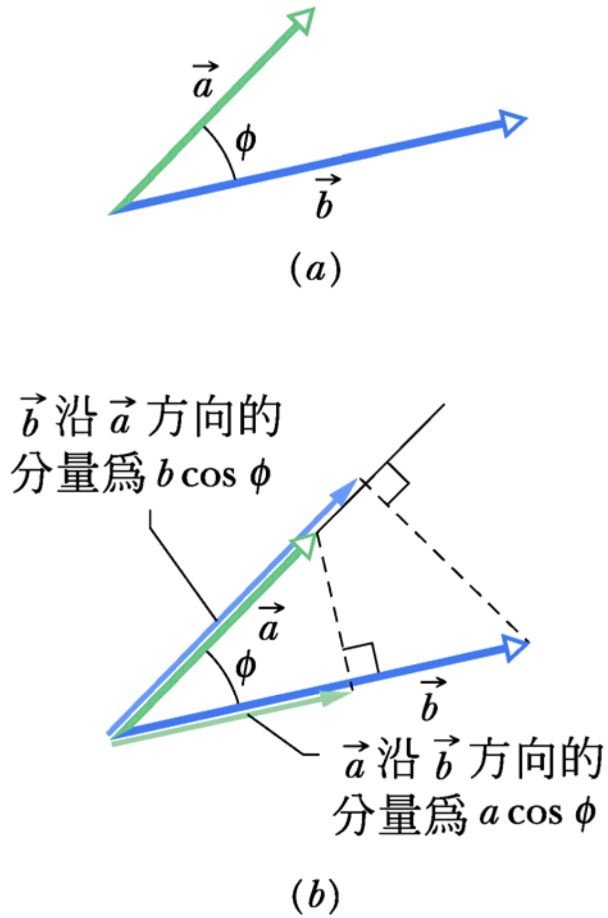
ϕ=? 時 a,b的內積有最大值和最小值?

純量積(內積)

兩向量的純量積（或內積）定義為

$$\boxed{\vec{a}\cdot\vec{b} = ab\cos\phi}$$ → **純量**

其中ϕ為向量a,b的夾角，純量積可能為正、零或負。



以單位向量表示時

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = (a_x\hat{i} + a_y\hat{j} + a_z\hat{k})\cdot(b_x\hat{i} + b_y\hat{j} + b_z\hat{k})$$
$$= a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

Example 3-7

求兩向量 $\vec{a} = 3.0\hat{\text{i}} - 4.0\hat{\text{j}}$ 和 $\vec{b} = -2.0\hat{\text{i}} + 3.0\hat{\text{k}}$ 間之夾角 ϕ。(留意：雖然下面許多步驟，在使用可計算向量的計算機會跳過不用計算，但若你採用這些步驟，則可以學到更多關於純量乘積的應用—至少在這裡是。)

關鍵概念

兩向量方向間的夾角，包含在其純量乘積的定義裡 (3-20 式)：

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = ab\cos\phi \tag{3-24}$$

計算 在式 3-24 中，a 為 $\vec{a}$ 的大小，即

$$a = \sqrt{3.0^2 + (-4.0)^2} = 5.00 \tag{3-25}$$

而 b 為 $\vec{b}$ 的大小，即

$$b = \sqrt{(-2.0)^2 + 3.0^2} = 3.61 \tag{3-26}$$

我們可以將向量以單位向量符號表示，並使用分配律，以便將 3-24 式的左式分開計算：

time management

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=(3.0\hat{\mathrm{i}}-4.0\hat{\mathrm{j}})\cdot(-2.0\hat{\mathrm{i}}+3.0\hat{\mathrm{k}})$$
$$=(3.0\hat{\mathrm{i}})\cdot(-2.0\hat{\mathrm{i}})+(3.0\hat{\mathrm{i}})\cdot(3.0\hat{\mathrm{k}})$$
$$+(-4.0\hat{\mathrm{j}})\cdot(-2.0\hat{\mathrm{i}})+(-4.0\hat{\mathrm{j}})\cdot(3.0\hat{\mathrm{k}})$$

接著將 3-20 式應用到上面的表示式的每一項。第一項 ($3.0\hat{\mathrm{i}}$ 和 $-2.0\hat{\mathrm{i}}$) 的向量間夾角為 0°，其它項的則為 90°，故可得

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=-(6.0)(1)+(9.0)(0)+(8.0)(0)-(12)(0)=-6.0$$

將 3-25 式與 3-26 式代回 3-24 式，得

$$-6.0=(5.00)(3.61)\cos\phi$$
$$\phi=\cos^{-1}\frac{-6.0}{(5.00)(3.61)}=109^\circ\approx110^\circ \qquad \text{(答)}$$

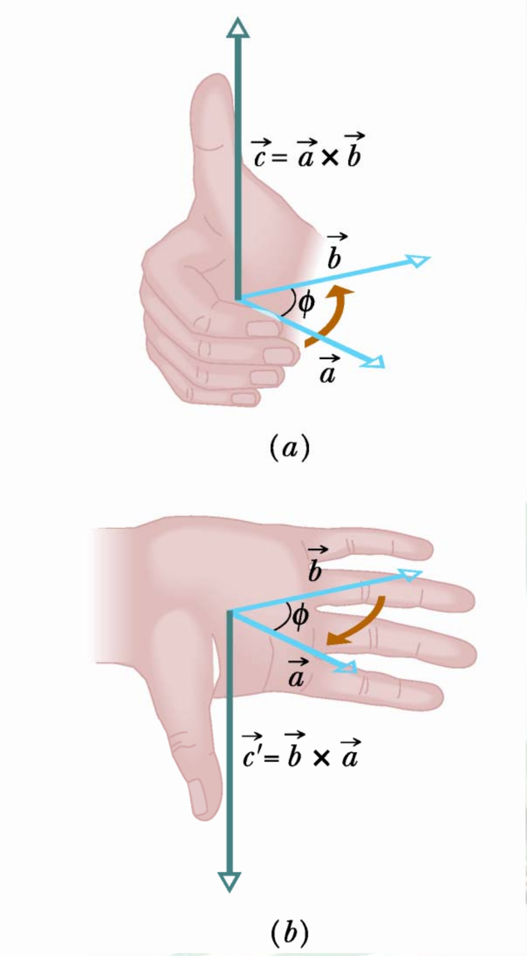
ϕ=? 時 a,b的外積有最大值和最小值?

向量積(外積)

兩向量的向量積（或外積）定義為

$$\boxed{\left|\vec{a}\times\vec{b}\right| = ab\sin\phi}$$

其中ϕ為向量a,b的最小夾角。



以單位向量表示時

$$\vec{a}\times\vec{b}=(a_x\hat{i}+a_y\hat{j}+a_z\hat{k})\times(b_x\hat{i}+b_y\hat{j}+b_z\hat{k})$$

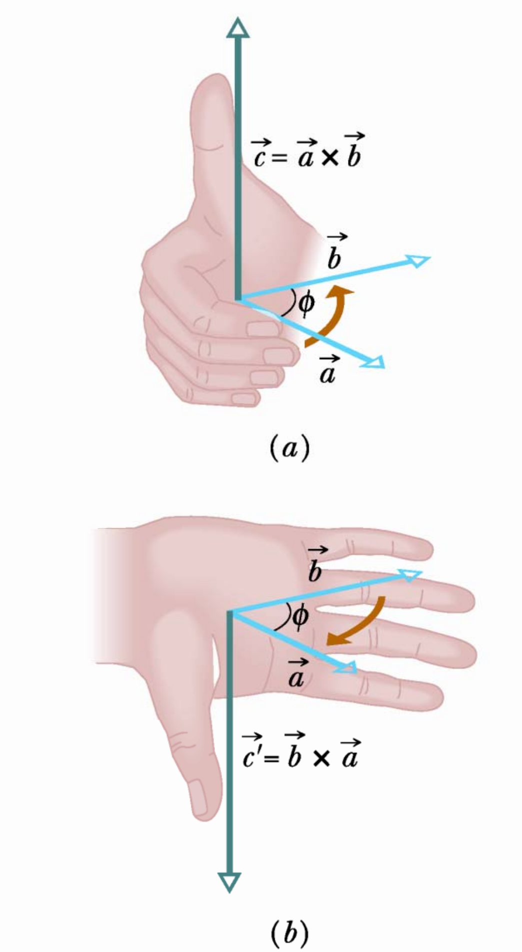
$$=a_xb_x\hat{i}\times\hat{i}+a_xb_y\hat{i}\times\hat{j}+a_xb_z\hat{i}\times\hat{k}$$

$$+a_yb_x\hat{j}\times\hat{i}+a_yb_y\hat{j}\times\hat{j}+a_yb_z\hat{j}\times\hat{k}$$

$$+a_zb_x\hat{k}\times\hat{i}+a_zb_y\hat{k}\times\hat{j}+a_zb_z\hat{k}\times\hat{k}$$

$$=a_xb_y\hat{k}+a_xb_z(-\hat{j})+a_yb_x(-\hat{k})+a_yb_z\hat{i}+a_zb_x\hat{j}+a_zb_y$$

$$\boxed{=(a_yb_z-a_zb_y)\hat{i}+(a_zb_x-a_xb_z)\hat{j}+(a_xb_y-a_yb_x)\hat{k}}$$



Example 3-8

在圖 3-22 中，向量 $\vec{a}$ 位於 xy 平面上，它的大小為 18 單位，方向與正 x 軸夾 250°
向量 $\vec{b}$ 大小為 12 單位，並指向正 z 軸。向量積 $\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}$ 為若干？

關鍵概念

當我們知道兩向量的大小及角度時，便可由3-27式求它們的向量積的大小，以及由圖 3-21 的右手定則求出其向量積的方向。

計算 其大小為：

$$c = ab\sin\phi = (18)(12)(\sin 90°) = 216 \quad \text{(答)}$$

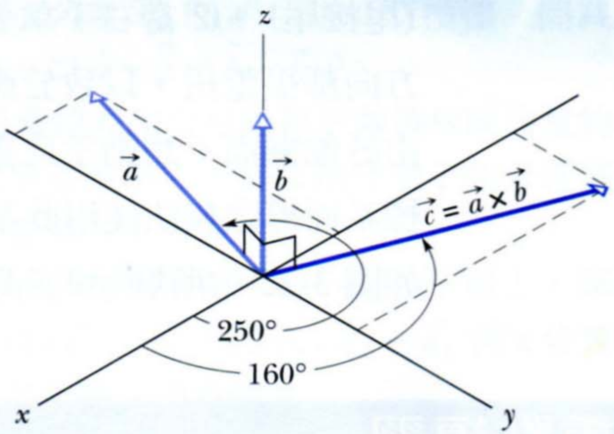


圖 3-22 向量 $\vec{c}$ (在 xy 平面上)是向量 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 的向量(或外)積。

如果想要判斷圖 3-22 的方向，讓我們想像將自己的手指繞著垂直於 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 所構成的平面的直線 (顯示著向量 $\vec{c}$ 的直線)，並且使得手指能夠從 $\vec{a}$ 掃到 $\vec{b}$，此時伸出的大拇指方向就是 $\vec{c}$ 的方向。因此如圖所示，$\vec{c}$ 位於 xy 平面。由於 $\vec{c}$ 垂直於 $\vec{a}$，故 $\vec{c}$ 的方向角為

$$250° - 90° = 160° \quad \text{(答)}$$

此方向角是相對於 x 軸正方向而言。

time management

Example 3-9

假若 $\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}$，其中 $\vec{a}=3\hat{\mathrm{i}}-4\hat{\mathrm{j}}$，$\vec{b}=-2\hat{\mathrm{i}}+3\hat{\mathrm{k}}$，試問 $\vec{c}$ 為若干？

關鍵概念

當兩向量是用單位向量法表示時，我們便可用分配律來求其向量積。

計算　我們可以寫出

$$
\begin{aligned}
\vec{c} &= (3\hat{\mathrm{i}}-4\hat{\mathrm{j}})\times(-2\hat{\mathrm{i}}+3\hat{\mathrm{k}}) \\
&= 3\hat{\mathrm{i}}\times(-2\hat{\mathrm{i}})+(3\hat{i}\times3\hat{\mathrm{k}})+(-4\hat{\mathrm{j}})\times(-2\hat{\mathrm{i}})+(-4\hat{\mathrm{j}})\times3\hat{\mathrm{k}}
\end{aligned}
$$

以 3-27 式計算每一項之值並以右手定則決定方向，得

$$\vec{c}=0-9\hat{\mathrm{j}}-8\hat{\mathrm{k}}-12\hat{\mathrm{i}}=-12\hat{\mathrm{i}}-9\hat{\mathrm{j}}-8\hat{\mathrm{k}} \qquad \text{(答)}$$

向量 $\vec{c}$ 垂直 $\vec{a}$ 以及 $\vec{b}$，可利用 $\vec{c}\cdot\vec{a}=0$ 和 $\vec{c}\cdot\vec{b}=0$ 來檢驗，也就是 $\vec{c}$ 在 $\vec{a}$ 或 $\vec{b}$ 之方向上沒有分量。