Chapter 2

直線運動

本章目的(Chapter Objectives)

- 為何啄木鳥受到樹幹強烈的反衝還可以存活?

time management

2-3 位置和位移

位置

一質點在x軸上的位置x係相對於軸上原點而言，位置到底為正或是負，全根據它位於原點的哪一邊，若它在原點，則位置為零；軸的正方向為數目增加的方向，相反的方向為負方向。

位移

質點的位移 x為位置的變化量：

$$\Delta x = x_2 - x_1 \qquad (2\text{-}1)$$

位移是一向量，假若質點朝x軸的正方向移動，位移為正，若是它朝負方向移動，則位移為負。

2-4 平均速度與平均速率

$$\text{平均速率}=\frac{\text{總路徑長}}{\text{時間間隔}}\Rightarrow U_{ave}=\frac{s}{\Delta t}$$

- 速率是指運動物體在單位時間內所行經的總路徑長，其僅表示快慢情形，而不表示方向。
- 一般所說的速率實指平均速率。
- 瞬時速率是指極短時間間隔內的平均速率，可視為某一時刻或某一位置的速率。
- 速率的單位有cm / s、m / s、km / hr、……。
- 日常生活所說的『速度』，實指『速率』。

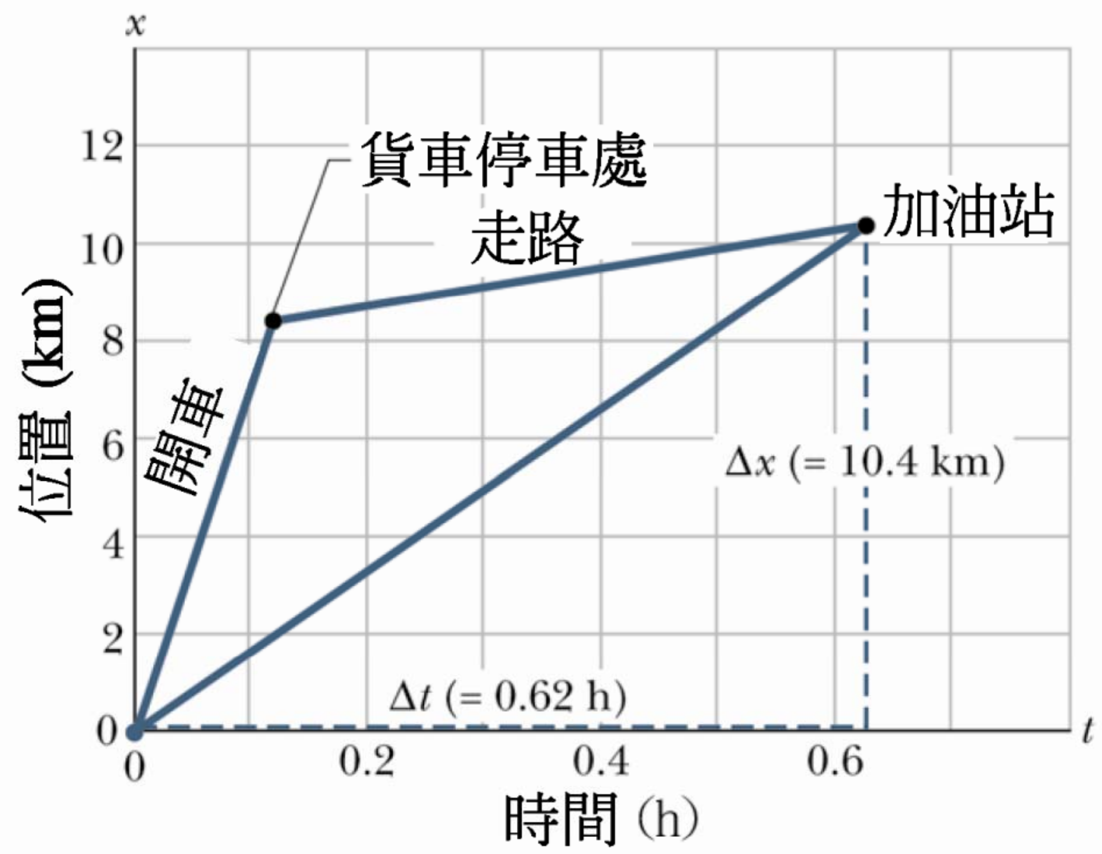
平均速度

$$平均速度=\frac{位移}{時間間隔}\Rightarrow V_{ave}=\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{x_2-x_1}{t_2-t_1}$$

- 速度是指運動物體在單位時間內所行經的位移，其兼指物體運動的快慢和方向 。
- 直線運動中，將速率加上正、負符號以表示方向，即為速度 。【速度與位移同方向】
- 一般所說的速度實指平均速度 。
- 瞬時速度是指極短時間間隔內的平均速度，比平均速度更能表示物體實際運動的快慢情形 。
- 速度的單位與速率相同。

time management

平均速度與平均速率例題



2-5 瞬時速度與瞬時速率

- 瞬時速率是指極短時間間隔內的平均速率，可視為某一時刻或某一位置的速率。

$$U = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt}$$

- 瞬時速度是指極短時間間隔內的平均速度，比平均速度更能表示物體實際運動的快慢情形 。

$$V = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}$$

time management

Example 2-3

一個在 x 軸運動的質點其位置為

$$x = 7.8 + 9.2t - 2.1t^3 \tag{2-5}$$

其中 x 的單位為公尺，t 為秒，在 $t = 3.5$s 時的速度為若干？判斷此速度是常數或是持續變化呢？

關鍵概念

速度是位置函數 $x(t)$ 的一階微分 (相對於時間 t)。

計算　為了簡單起見，我們將 2-5 式的單位省略，若你高興亦可將係數改為 7.8m、9.2m/s 和 -2.1m/s^3。對公式 2-5 微分因此求得

$$\begin{aligned} v &= \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(7.8 + 9.2t - 2.1t^3) \\ &= 0 + 9.2 - (3)(2.1)t^2 \\ &= 9.2 - 6.3t^2 \end{aligned} \tag{2-6}$$

在 $t = 3.5$s 時

$$v = 9.2 - (6.3)(3.5)^2 = -68 \text{ m/s} \qquad \text{(答)}$$

在 $t = 3.5$s 時，質點以 68 m/s 的速率朝負 x 的方向運動 (注意負號)。因為 t 出現在 2-6 式中，表示速度 v 和 t 有關，也就是說 v 不斷地隨 t 在變化著。

time management

2-6 加速度

- 平均加速度為在一時間間隔 內，速度的變化量與 的比值：正負符號表示 的方向。

$$a_{ave} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1}$$

- 瞬時加速度(簡稱加速度)a是速度v(t)的第一時間導數，也是位置x(t)的第二時間導數。

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$$

Example 2-4

一個質點的位置，如圖 2-1 所示，可由下式表示

$$x = 4 - 27t + t^3$$

其中 x 的單位是公尺，t 的單位是秒。

(a)因為位置x與時間t有關，所以質點必然在運動。求此質點的 $v(t)$ 和 $a(t)$ 函數式。

關鍵概念

(1)欲求速度函數 $v(t)$，我們將位置函數 $x(t)$ 對時間 t 微分。

(2)欲求 $a(t)$，我們將 $v(t)$ 對時間 t 微分。

計算 將位置函數 $x(t)$ 對時間 t 微分，可以得到

$$v = -27 + 3t^2 \qquad \text{(答)}$$

其中 v 的單位為 m/s。將 $v(t)$ 對時間 t 微分，我們得到

$$a = +6t \qquad \text{(答)}$$

其中 a 的單位為 m/s^2。

(b)何時 $v = 0$？

計算 令 $v(t) = 0$，得

$$0 = -27 + 3t^2$$

其解為

$$t = \pm 3s \qquad \text{(答)}$$

因此，在計時開始前和後 3 秒速度均為零。

(c)描述 $t \geqq 0$，質點的運動情況。

推理 我們需要去檢視 $x(t)$，$v(t)$ 和 $a(t)$ 數學式。

在 $t = 0$ 時，質點在 $x(0) = +4\text{m}$ 處，以 $v(0) = -27\text{m/s}$ 的速度運動(也就是 x 軸負方向)，同時，因為在那一瞬間，速度不改變，所以 $a(0) = 0$。

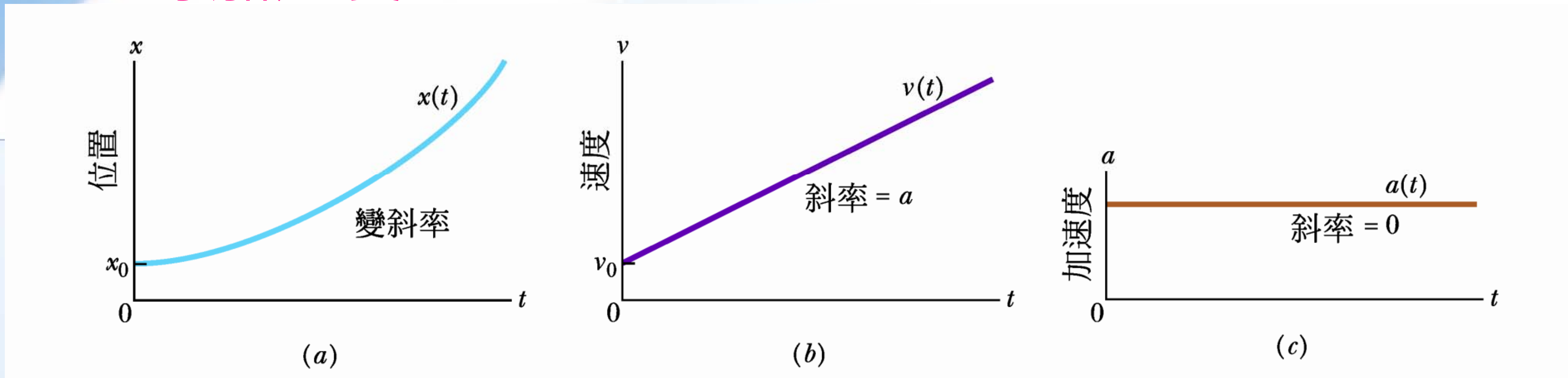
當 $0 < t < 3\text{s}$，質點仍然具有負速度，所以它繼續向負方向運動。不過質點的加速度不為零且為遞增的正值(因為速度的正負號與加速度的正負號是相反的，所以質點的速度必然在減緩)。

我們已經知道在 $t = 3\text{s}$，質點暫時停止。此時質點抵達圖 2-1 的原點左方的最遠處。將 $t = 3\text{s}$ 代入 $x(t)$ 式中，可得此時質點的位置在 $x = -50\text{m}$，其加速度仍然是正值。

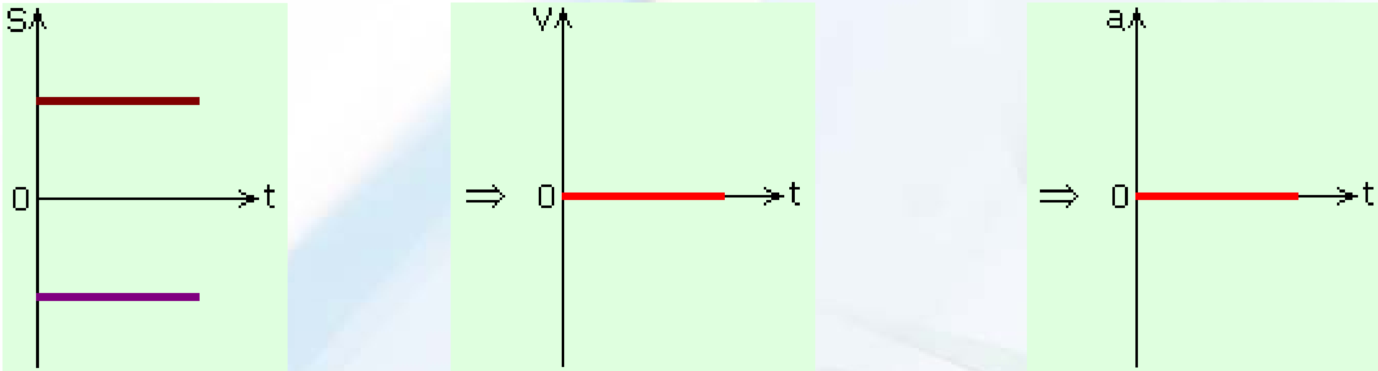
當 $t > 3\text{s}$，質點朝 x 軸右方向運動。其值為正的加速度繼續增加，並且它的速度亦為正值而且增加得很快。(注意此刻 v 和 a 的正負符號是相同的)。

time management

2-7 等加速度



靜止



等速度

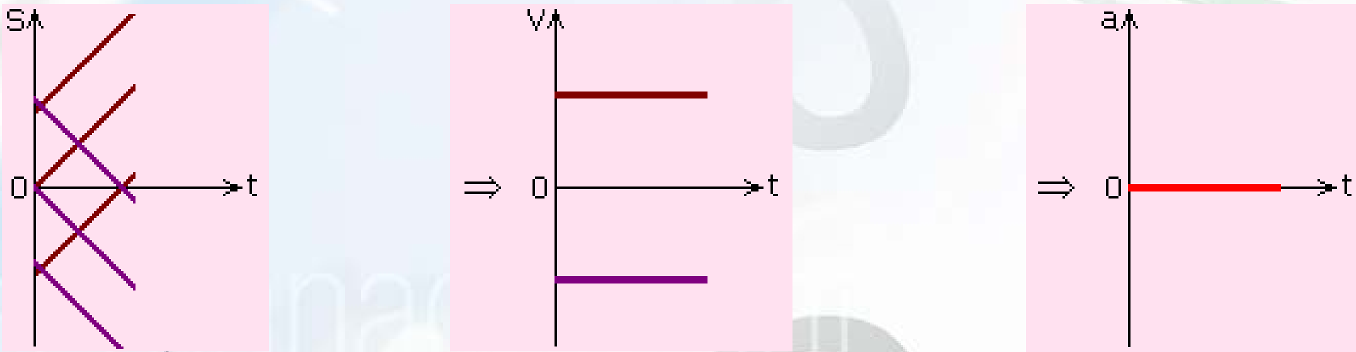


表 2-1　等加速度運動方程式[a]

方程式編號	方程式	缺項
2-11	$v = v_0 + at$	$x - x_0$
2-15	$x - x_0 = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$	v
2-16	$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)$	t
2-17	$x - x_0 = \frac{1}{2}(v_0 + v)t$	a
2-18	$x - x_0 = vt - \frac{1}{2}at^2$	v_0

[a] 使用表中的這些方程式之前，先確定加速度為定值。

time management

Example 2-5

在鳥喙初次接觸樹木枝幹時，啄木鳥頭以 7.49 m/s 速率向前移動。鳥喙在貫入枝幹 1.87 mm 以後停止下來。假設加速度為常數，試找出以 g 表示之加速度量。

關鍵概念

解題時可以利用等加速度公式；特別是，與速度和位移有關的 2-16 式 ($v^2 = v_0^2 + 2a(x-x_0)$)。

計算 因為啄木鳥的頭停止，所以最後的速度 $v = 0$。而初始速度 v_0=7.49m/s，而且在等加速度的過程中，位移為 $x-x_0 = 1.87\times10^{-3}$ m。將上述數值代入 2-16 式，可得

$$0^2 = (7.49\text{m/s})^2 + 2a(1.87\times10^{-3}\text{m})$$

或 $$a = -1.500\times10^4\text{m/s}^2$$

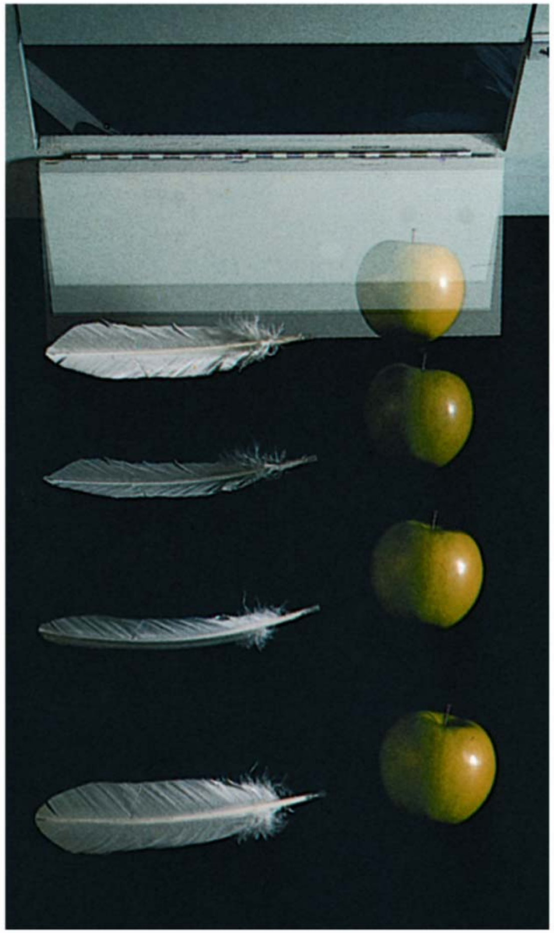
除以 $g = 9.8\text{m/s}^2$ 並取絕對值，可求得啄木鳥頭加速度大小為

$$a = (1.53\times10^3)\,g \qquad \text{(答)}$$

time management

註解　啄木鳥所受的平均加速度大小，約為圖 2-7 J. P. Stapp 上校所受加速度大小的 70 倍，而這肯定會讓他失去性命。目前還不清楚，為何啄木鳥能承受如此巨大的加速度，但是有兩個主要的論點：(1) 啄木鳥幾乎沿著直線運動。一些研究者相信，當頭部快速沿著頸部 (及腦幹) 旋轉時，可能造成人類或動物腦震盪，但是如果運動為直線，則似乎比較不會發生腦震盪；(2)啄木鳥的腦袋非常確實地固定於頭顱，而使得在受衝擊後腦袋有較小殘餘移動或振動，因而不至於撕裂連結頭顱與腦袋之組織。

2-9 自由落體加速度



- 等加速直線運動的一個重要例子，即是靠近地球表面的物體自由的上升或下落時。
- 等加速運動方程式描述這種運動，但我們在記號上作兩個改變：(1)把垂直向上運動的方向定義為+y方向；(2)以-g代替a，其中g是靠近地表附近自由落體加速度的大小，$g=9.8\ m/s^2$。

Example 2-7

在 1993 年 9 月 26 日，Dave Munday 坐在挖空的鐵球中，從加拿大邊境的尼加拉瀑布自由落下。他當時下降了 48m 才到達水面 (以及岩石)，我們假設當時的初速為 0，並且不考慮任何空氣的阻力。

(a)Munday 花了多久的時間才掉落到水面上？

關鍵概念

因為 Munday 下墜為自由落體，所以可應用表 2-1 的等加速度公

計算　將 y 軸設置在它下墜的路徑上，以 $y=0$ 為起始點且朝上為正 (圖 2-11)。因此沿該軸加速度 $a=-g$，且水面在 $y=-48\text{m}$ (負值乃因其低於 $y=0$)。令下墜開始於時間 $t=0$，而且初始速度 $v_0=0$。

自表 2-1 中我們選擇了 2-15 式 (改成 y 方向)，因為它包含了所需求解的時間 t 以及其它已知的變數。因此我們得到

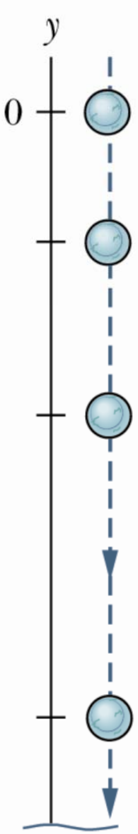
$$y-y_0=v_0t-\frac{1}{2}gt^2$$

$$-48\text{m}-0=0t-\frac{1}{2}(9.8\text{m/s}^2)t^2$$

$$t^2=(48/4.9)$$

所以　$t=3.1\text{s}$　(答)

注意 Munday 的位移 $y-y_0$ 是負值，因為 Munday 落下來的方向是沿著 y 軸 (他不是往上飛！)。而且 48/4.9 有兩個平方根：3.1 及 −3.1。我們選擇正根，因為 Munday 很明顯地是在 $t=0$ 之後才到達水面上的。



t	y	v	a
(s)	(m)	(m/s)	(m/s^2)
0	0	0	−9.8
1	−4.9	−9.8	−9.8
2	−19.6	−19.6	−9.8
3	−44.1	−29.4	−9.8
	−48.0		−9.8

圖 2-11　自由落體的位置，速度及加速度。自由落體在此為 Munday 在尼加拉瀑布所乘坐的鐵球。

(b) Munday 可以在落下的同時數出他落下的時間，但是他卻無法得知他在任一時刻所落下的距離。請算出他在每一整秒的位置。

計算 我們再次利用 2-15 式，但是我們依序代入 $t = 1.0\text{s}$，$t = 2.0\text{s}$ 以及 $t = 3.0\text{s}$，並且解出 Munday 的位置 y，結果如圖 2-11 所示。

(c) Munday 落到水面時的速度是多少？

計算 直接由原始數據來求速度，不需要用到(a)中所求得的落下的時間，我們重寫 2-16 式並且代入已給的數據：

$$v^2 = v_0^2 - 2g(y - y_0) = 0 - (2)(9.8\text{m/s}^2)(-48\text{m})$$

因此 $$v = -30.67\text{m/s} \approx -31\text{m/s} = -110\text{km/h} \qquad \text{(答)}$$

因為速度向下，所以這次我們選擇負根。

(d) 每一整秒 Munday 的速度是多少？他能察覺增加中的速率嗎？

計算 我們令 $a = -g$ 代入 2-11 式，並且將 $t = 1.0\text{s}$，$t = 2.0\text{s}$ 以及 $t = 3.0\text{s}$ 依次代入，這樣就不必用到(b)的答案來找出速度 v。我們得到

$$v = v_0 - gt = 0 - (9.8\text{m/s}^2)(1.0\text{s}) = -9.8\text{m/s} \qquad \text{(答)}$$

其它的結果亦列在圖 2-11 中。

在他自由落下的過程中 Munday 未曾察覺到速度正在增加，是因為落下的加速度一直都是 -9.8m/s^2，如同圖 2-11 最後一行所列出來的一般。在他落到水面上之時他當然會知道，因為此時加速度有很大的改變。(雖然 Munday 在這次的表演中活了下來，但是他必須為此次膽大的行為被科處罰金。)

Example 2-8

一投手以 12m/s 的初速將一棒球朝向正 y 方向鉛直上拋，見圖 2-12。

(a)球抵達最高點需時若干？

關鍵概念

(1)一旦球離開投手，在它回到投手的手之前，加速度均為自由落體加速度 $a=-g$。因為這是常數，所以可以應用表 2-1。(2)當它在最高點時，球速 v 為零。

計算　我們已經知道 v，a 和初始速度 $v_0=12\text{m/s}$，並且是要求取 t，因為式 2-11 含有上述這四個變數，所以可以由式 2-11 加以求解。結果得到

$$t=\frac{v-v_0}{a}=\frac{0-12\text{m/s}}{-9.8\text{m/s}^2}=1.2\text{s} \qquad \text{(答)}$$

(b)球被拋出後能上升多高？

計算　我們將球的拋出點定為 y 軸的原點。將 2-16 式以 y 表示，令 $y-y_0=y$ 且 $v=0$(在最高點)，同時解 y 得

$$y=\frac{v^2-v_0^2}{2a}=\frac{0-(12\text{m/s})^2}{2(-9.8\text{m/s}^2)}=7.3\text{m} \qquad \text{(答)}$$

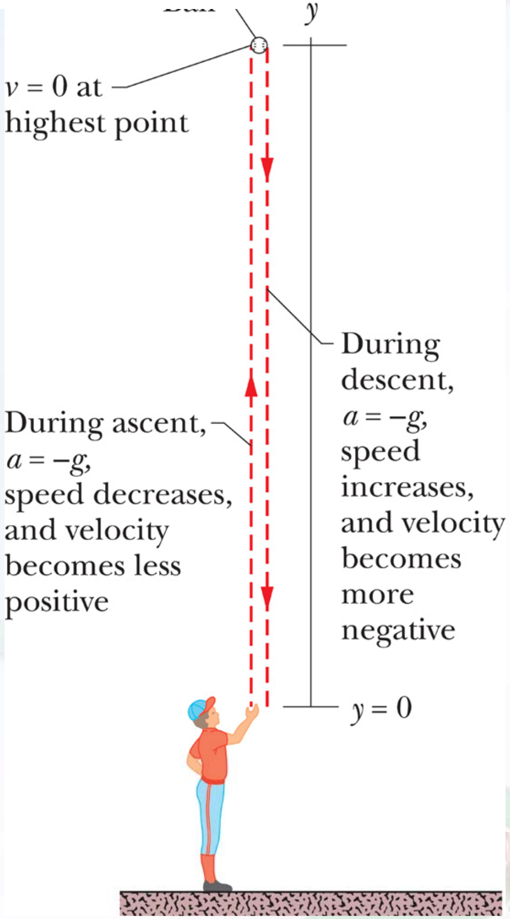


圖 2-12　一投手將球鉛直上拋。自由落體的方程式適用上升以及下落的物體，假設空氣的任何影響皆可以被忽略。

(c)球被拋出後高於拋出點 5.0m 高度處需時若干？

計算　已知v_0，$a=-g$，以及位移$y-y_0=5.0\text{m}$為求 t，所以由 2-15 式，令 $y_0=0$ 得

$$y=v_0t-\frac{1}{2}gt^2$$

或

$$5.0\text{m}=(12\text{m/s})t-\left(\frac{1}{2}\right)(9.8\text{m/s}^2)t^2$$

略去單位，可將上式改寫成

$$4.9t^2-12t+5.0=0$$

解 t 得

$$t=0.53\text{s} \text{ 以及 } t=1.9\text{s} \qquad \text{(答)}$$

竟有兩個時間！這不需驚訝，因為球經過$y=5.0\text{m}$兩次，一次在上升途中，另一次在下降途中。